Einfache Funktionen II

Geradengleichungen:

Punkt-Steigungsform

$$\boxed{g:\ y = mx + b, \quad x \in R}$$

bzw. $\boxed{g:\ y = m(x - x_p) + y_p}$ $\quad$ $\boxed{(x_p; y_p)}$ ist Punkt auf g

$\boxed{m}$ ist Steigung

Zweipunktform

$$\boxed{g:\ y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{(x_1; y_1)}$ u. $\boxed{(x_2; y_2)}$ sind Punkte auf g

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktion / Parabelfunktion

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Leitkoeffizient (Streckfaktor)}}}{a}x^2 + bx + c}$$

Graph = Parabel, bei $a = 1$ Normalparabel

faktorisierte Form: $\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$

Scheitelpunktform: $\boxed{f(x) = a(x - S_x)^2 + S_y}$

$$\boxed{\begin{aligned} b &= -2 \cdot a \cdot S_x \\ c &= a \cdot S_x^2 + S_y \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} S_x &= -\frac{b}{2a} \\ S_y &= c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}}$$

Lösung elementarer Gleichungen

quadratische Gleichungen

allgemeine Form: $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

Normalform: $\boxed{x^2+px+q=0}$

quadratisch ergänzte Form: $\boxed{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2}$

p-q-Formel: $\boxed{x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$

$$\boxed{x=\frac{1}{2}\left(-p\pm\sqrt{p^2-4q}\right)}$$

Satz von Vieta:

$$\boxed{x^2+px+q=(x-x_1)\cdot(x-x_2)}\text{, wo}$$

~~$x_1=$~~ $\boxed{\begin{aligned}p&=-(x_1+x_2)\\ q&=x_1\cdot x_2\end{aligned}}$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Additionsverfahren: $\left.\begin{aligned}3x-4y&=2\\2x+3y&=7\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}-6x+8y&=-4\\ \underline{6x+9y}&\underline{=21}\ +\\ 17y&=17\end{aligned}\right.$

Einsetzungsverfahren: nach einer Variable auflösen und in andere Gleichung einsetzen

Gleichsetzungsverfahren: Beide nach einer Variable auflösen u. gleichsetzen

Polynome u. rationale Funktionen I

Polynom n-ten Grades:

Funktion der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$

↑ Leitkoeffizient

- → $a_n, a_{n-1}, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$
- → $D_p = \mathbb{R}$
- → max n Nullstellen

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Nullpolynom: $p(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

→ kein Grad

es gilt

- für $x \to \pm\infty$: genauso wie bei $a_n x_n$
- für $x \to 0$: genauso wie bei $\underbrace{a_k}_{\text{kleinstes}} x^k + a_0$ $\boxed{a_k \neq 0}$

Abspaltung eines Linearfaktors

Grad n

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \\ c \in \mathbb{R} \\ d = p(c) \end{array}\right\} \Rightarrow p(x) = \overset{\boxed{\text{Grad } n-1}}{q(x)} \cdot (x - c) + d$$

bzw. $p(x) = q(x) \cdot (x - c)$ wenn c Nullstelle von p

↑ Linearfaktor

↑ Restpolynom

$p(x) = q_k(x) \cdot (x - x_0)^k$ $\quad q_k(x_0) \neq 0$

↑ k-fache Nullstelle

$\boxed{\text{k gerade} \to \text{lokale Extremstelle}}$

Polynomdivision
(Pol. div.)

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$$

$f(x) : f(x) = q(x)$, Rest $r(x)$

Teleskopsumme

$$x^{n+1} - 1 = (x - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n} x^j$$

$$= x^{n+1} \boxed{- x^n + x^n} \boxed{- x^{n-1} + x^{n-1}} + \ldots - 1$$

Polynome u. rationale Funktionen II

Das Horner-Schema

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$p(x) = (((\ldots)\cdot x + a_2)\cdot x + a_1)\cdot x + a_0$$

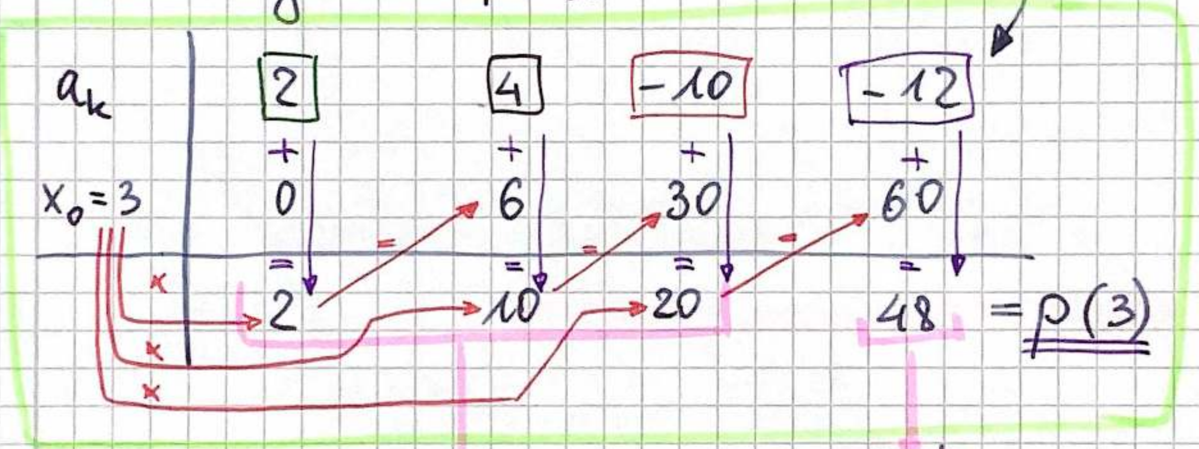
ausklammern

z.B. $p(x) = \boxed{2}x^3 + \boxed{4}x^2 \boxed{-10}x \boxed{-12}$

$= (2x^2 + 4x - 10)\cdot x - 12$

$= ((2x + 4)\cdot x - 10)\cdot x - 12$

Berechnung von $p(x_0)$:



a_k	2	4	−10	−12
	+	+	+	+
$x_0 = 3$	0	6	30	60
	=	=	=	=
	2	10	20	48

$= \underline{p(3)}$

- Koeffizienten von $q(x)$, sodass

$$p(x) = (x - x_0)\cdot q(x) + r$$

→ Abspaltung eines Linearfaktors (Nullstelle x_0)

- Koeffizienten von Ergebnis der Polynomdivision durch linearen Faktor $x - c$, wobei $c = x_0$

Polynome u. rationale Funktionen III

(Gebrochen) Rationale Funktion $r(x)$ ist

$$\boxed{r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}}$$

Nullstellen von $g(x)$ sind

→ Definitionslücken (Singularitäten)

→ bzw. Polstellen

echt gebrochen rational: $\boxed{\text{grad}(f) < \text{grad}(g)}$